Homéomorphisme de l'exponentielle

Leçon 158, 156, 160, 155, 148
↳ si on montre la décomp. polaire

Réf. H2G2 tome 1

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant.

Théorème 1

L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

On commence par démontrer le lemme suivant, se basant sur la décomposition polaire.

Lemme 1

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, où ρ est le rayon spectral.

En particulier, si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\|M\|_2 = \rho(M)$.

<u>Preuve</u> (lemme 1).

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On écrit la décomposition polaire de A. On a $A = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors $\|A\|_2 = \|OS\|_2 = \|S\|_2$ (car O est orthogonal, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|OS(x)\|_2 = \|S(x)\|_2$).

Par le thm spectral, S est diagonalisable en b.o.n. Il existe $P \in O(n)$ tq $PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Quitte à réordonner P on peut supposer que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. On a alors, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ est de norme 1 et $(v_1, \dots, v_n)$ est la b.o.n. adéquate, alors

$$\|S(x)\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i v_i\right\|_2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right\|_2 = \rho(S).$$

Donc $\|S\|_2 \leq \rho(S)$ et $\|S(v_1)\|_2 = \rho(S)$, donc $\boxed{\|S\|_2 = \rho(S)}$.

Il vient : $\rho(S) = |\lambda_1| = \sqrt{|\lambda_1|^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

$\square$

<u>Preuve</u> (théorème 1). Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = Sp(S)$. Alors il existe P orthogonale tq
$\subset \mathbb{R}$.
$S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$.

On a $\exp(S) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{T}$
$\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$(\forall i \in [\![1, n]\!],\ e^{\lambda_i} > 0)$.

Ainsi exp envoie bien <u>$S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$</u>. Par restriction, elle <u>reste continue</u>.

• Montrons la surjectivité. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O(n)$
tq $B = P\,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \underbrace{P^{-1}}_{= P^T}$, avec $\forall i,\ \mu_i > 0$.

On pose alors $A = P\,\mathrm{diag}(\ln \mu_1, \dots, \ln \mu_n) P^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$
(car P orthogonale)

donc on a $\exp(A) = B$, $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est surjective.

~~• Montrons la bicontinuité.~~
~~Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de S_n^{++}~~

• Montrons l'injectivité.
Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(A) = \exp(A')$. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = Sp(A)$.
Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tq $\forall i,\ Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.
Alors A' commute avec $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$.
A' et A commutent, donc elles sont simultanément diagonalisables.
Si $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = Sp(A')$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq
$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $PA'P^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$.

On a alors $\exp(A)=\exp(A') \Rightarrow P^{-1}\exp(\lambda_i)P = P^{-1}\exp(\mu_i)P$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,m]\!],\ e^{\lambda_i}=e^{\mu_i}$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,m]\!],\ \lambda_i=\mu_i$

$\Rightarrow A=A'$.

Donc $\exp : S_m(\mathbb{R}) \to S_m^{++}(\mathbb{R})$.

- Montrons la bicontinuité.

Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ suite de matrices de $S_m^{++}(\mathbb{R})$ convergeant vers $B=\exp A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$. Mq $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$.

La suite $(B_p)_p$ CV pour $\|.\|_2$, elle est donc bornée. De même, par continuité du passage à l'inverse, $B_p^{-1} \to B^{-1}$, donc $(B_p^{-1})_p$ est bornée pour $\|.\|_2$.

Or par le lemme 1, si $M \in S_m^{++}(\mathbb{R})$, ~~$\rho(M)$~~ $= \|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^TM)}$
$= \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M)$.

Donc tous les spectres des B_p sont majorés par une cste C.
De même avec les B_p^{-1}, car on déduit que les spectres des B_p sont minorés par une cste C'. Ainsi toutes les vp des B_p sont contenues dans le compact $K=[C',C] \subset]0,+\infty[$.

Ainsi, les vp des A_p sont dans le compact $[\ln C, \ln C']$ de $\mathbb{R}$.

La suite $(A_p)_p$ est donc bornée pour $\|.\|_2$.

Dans un ev de dim finie, une suite bornée qui n'a qu'une valeur d'adhérence CV vers cette valeur d'adhérence, et ici A est la seule valeur d'adhérence. En effet, soit (A_{p_k}) une suite extraite qui CV vers $\bar{A}$. Alors $\exp A_{p_k} = B_{p_k}\ \forall k \Rightarrow \exp\bar{A} = B = \exp A$. Par injectivité de l'exp sur $S_m^{+}(\mathbb{R})$, il vient $\bar{A}=A$.

□

On peut aussi montrer de manière similaire que $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

→ on peut faire en corollaire, pour la 148, l'application de la décomposition polaire.

→ ne pas faire le lemme 1. De plus si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\|M\|_2 = \rho(M)$, nous utilisons la décomposition polaire.

Théorème
La multiplication matricielle induit un homéomorphisme
$$O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}).$$

Preuve découle de l'homéomorphisme $\left| \begin{array}{l} S_n^{+}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ S \mapsto S^{1/2} \end{array} \right.$

$\left[S \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\exp^{-1}(S)\right). \right.$